Teorema lui Nyquist – Shannon - Demonstrație
Evidențierea conceptului de „timp de eșantionare” sau „frecvență de eșantionare” (eng. sample time or sample frequency)

IPOTEZĂ: DE CE TIMPUL DE EȘANTIONARE (SAU NUMĂRUL DE MĂSURĂTORI ÎN UNITATEA DE TIMP) TREBUIE SĂ FIE DE 20 DE ORI MAI MIC DECÂT PERIOADA FUNDAMENTALEI VEHICULATE? (DEMONSTRAȚIA TEOREMEI LUI NYQUIST – SHANNON):

Pentru achiziția unui semnal (analogic) „$y_{(t)}$”, cu frecvența „$f_{y(t)}$” într-un sistem de calcul în timp real (**numeric / discret**), este nevoie de un număr de „N” măsurători, achiziționate în timpul „$T_{sample(t)}$”. Frecvența obținută prin raportul „$f_{sample(t)} = N / T_{sample(t)}$” se numește **FRECVENȚĂ DE EȘANTIONARE** sau **DE ACHIZIȚIE** (eng. **sample frequency**), iar perioada „$T_{sample(t)}$” se numește **TIMP DE EȘANTIONARE** (eng. **sample time**) (timpul în care sistemul de calcul preia măsurătorile). Pentru **achiziția corectă** (adică **semnalul achiziționat** să fie **cât mai apropiat sau chiar asemănător** cu cel **original** după reconstituirea lui din datele achiziționate), se recomandă ca **frecvența de eșantionare / achiziție** să fie **mai mare** decât **frecvența maxim vehiculată a fundamentalei din sistem.** În cazul în care acest lucru **nu se respectă**, se vor obține niște **forme de undă distorsionate**. Acest fenomen de **distorsionare a semnalului achiziționat** din cauza **frecvenței reduse de eșantionare** poartă numele de **ALIASING.** Iar **semnalul incorect generat** se numește **ALIAS.**

Pentru **prevenirea** fenomenului ALIAS (eng. anti-aliasing), se impune o **frecvență de prag**, numită **FRECVENȚĂ NYQUIST peste care, acest fenomen se reduce**. Aceasta se exprimă ca și **dublul frecvenței fundamentale maxime** vehiculate în sistem: $f_{Nyquist} = 2 \times f_{y(t)}$:
(ex. pentru o frecvență de $f_{y(t)} = 50$ [Hz], $f_{Nyquist} = 2 \times 50$ [Hz] = 100 [Hz] – Adică **frecvența de eșantionare** „$f_{sample(t)}$” trebuie să fie **mult mai mare** decât 100 [Hz] – frecvența Nyquist).

ENUNȚUL TEOREMEI: Pentru prevenirea **fenomenului ALIAS** în procesul de **achiziție sau generare numerică / discretă de semnal**, se recomandă ca **frecvența de achiziție a semnalului** să fie **mult mai mare decât frecvența Nyquist** (mai **mare** decât **dublul frecvenței fundamentale maxime** vehiculate în sistem). În cazul **perioadei de eșantionare** (eng. sample time), aceasta trebuie să fie **mult mai mică** decât **perioada Nyquist**
(adică $T_{Nyquist} = (1 / f_{Nyquist}) = 1 / 2 \times f_{y(t)}$) sau (**perioada / timpul de eșantionare** să fie **mult mai mic / mică decât jumătatea perioadei minime fundamentale** vehiculate în sistem).
(ex. $f_{y(t)} = 50$ [Hz], $T_{y(t)} = 1 / 50$ [Hz] = 0.02 [s];
$T_{Nyquist} = 1 / 2 \times f_{y(t)} = 1 / 2 \times 50$ [Hz] = 1 / 100 [Hz] = 0,01 [s]; SAU $T_{Nyquist} = T_{y(t)} / 2$
Deci, $T_{sample(t)} >> T_{Nyquist} = 0,01$ [s];

SE PROPUN URMĂTOARELE CAZURI:
Fie un semnal sinusoidal „y(t)” cu **frecvența fundamentală de f = 50 [Hz]**. Se dorește urmărirea comportamentului semnalului achiziționat la **cinci frecvențe de eșantionare diferite** (măsurători / puncte în unitatea de timp) anume:

Realizat de: Ing. mast. Pintilie Lucian Nicolae
Pentru disciplina: „Sisteme de calcul în timp real”
Adresă de e-mail: Lucian.Pintilie@emd.utcluj.ro

A. $f_{sample(t)} = f_{y(t)} = 1 \times 50$ [Hz]; $T_{sample(t)} = 0{,}02$ [s]; << $T_{Nyquist} = 0{,}01$ [s];
B. $f_{sample(t)} = 2 \times f_{y(t)} = 2 \times 50$ [Hz] = 100 [Hz]; $T_{sample(t)} = 0{,}01$ [s] = $T_{Nyquist} = 0{,}01$ [s];
C. $f_{sample(t)} = 4 \times f_{y(t)} = 4 \times 50$ [Hz] = 200 [Hz]; $T_{sample(t)} = 0{,}005$ [s] > $T_{Nyquist} = 0{,}01$ [s];
D. $f_{sample(t)} = 8 \times f_{y(t)} = 8 \times 50$ [Hz] = 400 [Hz]; $T_{sample(t)} = 0{,}0025$ [s] >> $T_{Nyquist} = 0{,}01$ [s];
E. $f_{sample(t)} = 12 \times f_{y(t)} = 12 \times 50$ [Hz] = 600 [Hz]; $T_{sample(t)} = 0{,}001(6)$ [s] >> $T_{Nyquist} = 0{,}01$ [s];

Unde „$f_{sample(t)}$” este **frecvența de eșantionare**, „$T_{sample(t)}$” **timpul de eșantionare** (corespondentul la parametrul „Fixed-step size (fundamental sample time)” iar „$\mathbf{T_{Nyquist}}$” este **perioada Nyquist**, calculată ca și inversul **frecvenței Nyquist** sau **jumătate din perioada fundamentalei minime vehiculate în sistem;**

OBSERVAȚII: 1. **Coeficientul de multiplicare al frecvenței fundamentale** în raport cu frecvența de eșantionare ne **indică numărul de puncte achiziționate la un ciclu de o perioadă completă** ($2 \times \pi = 360°$); (ex. cazul A. $f_{sample(t)} = f_{y(t)} = 1 \times 50$ [Hz]; $T_{sample(t)} = 0{,}02$ [s]; - avem 1 (un) singur punct achiziționat);

Se va reprezenta grafic comportamentul semnalului achiziționat (fig. 9 – A, B, C, D, E).

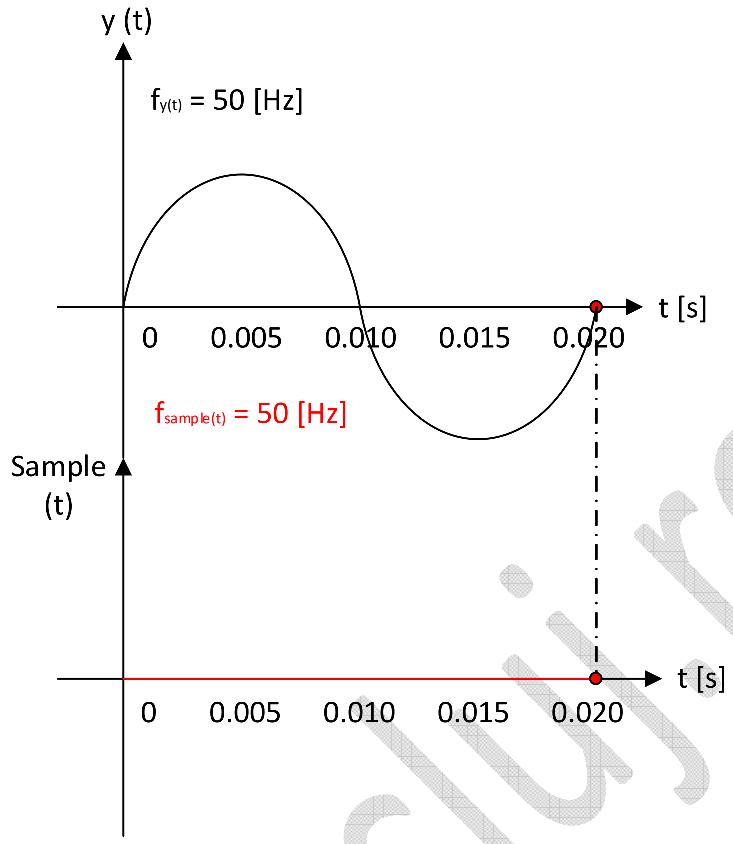
2. Pe măsură ce **timpul de eșantionare scade** (devine mai mic, deci **frecvența** cu care se obțin punctele de măsură **crește**, adică se iau **mai multe măsurători** într-un **timp mai scurt**) **reprezentarea semnalului devine tot mai fidelă**, apropiată de forma **continuă pur sinusoidală generată pe cale analogică**. **Din acest motiv se recomandă ca frecvența de eșantionare (sample frequency) să fie de 20 (două zeci) de ori mai mare decât frecvența fundamentală maximă vehiculată în modelul matematic. Desigur, că în cazul perioadei, timpul de eșantionare va trebui să fie mai mic decât perioada minimă vehiculată în model.**

3. Un astfel de semnal numeric „**construit din puncte**” de aproximații succesive se numește **SEMNAL NUMERIC DISCRET;**

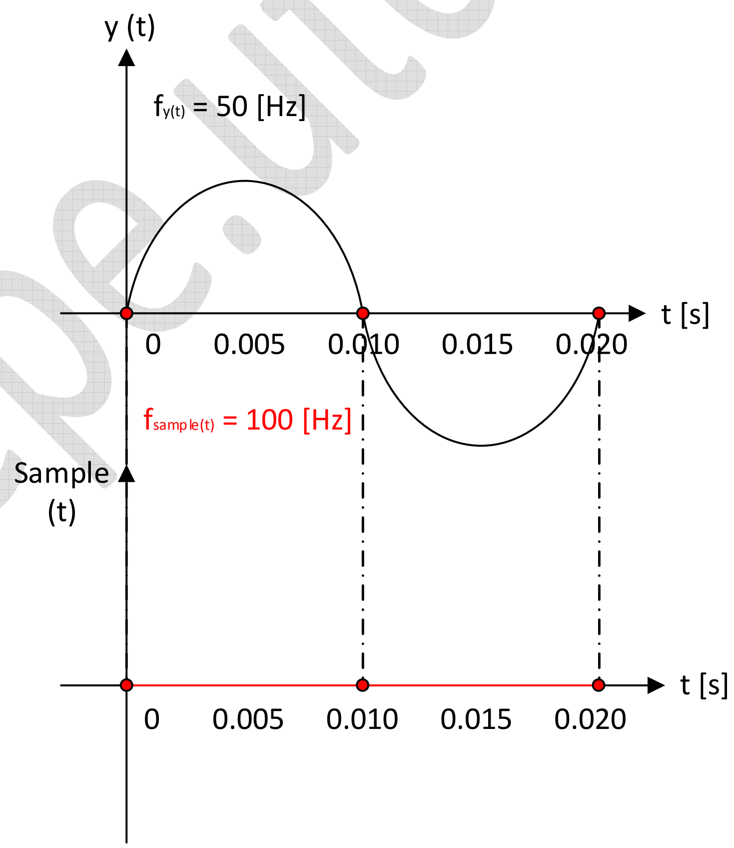
4. **Acțiunea de ATRIBUIRE DE VALORI NUMERICE** unei **variabile** dintr-o **anume expresie matematică** (**redată sub formă analitică**) **ÎN MOD REPETAT** cu scopul de a rezolva ecuația expresiei sau a ridica caracteristica / curba de variație a expresiei se numește **DISCRETIZARE.**

5. Sistemele cu **micro-controller** sunt sisteme de calcul în timp real **preponderent discret - numerice.** (**de aici justificarea alegerii opțiunii „discrete (no continuous states)”**).

Realizat de: Ing. mast. Pintilie Lucian Nicolae
Pentru disciplina: „Sisteme de calcul în timp real”
Adresă de e-mail: Lucian.Pintilie@emd.utcluj.ro

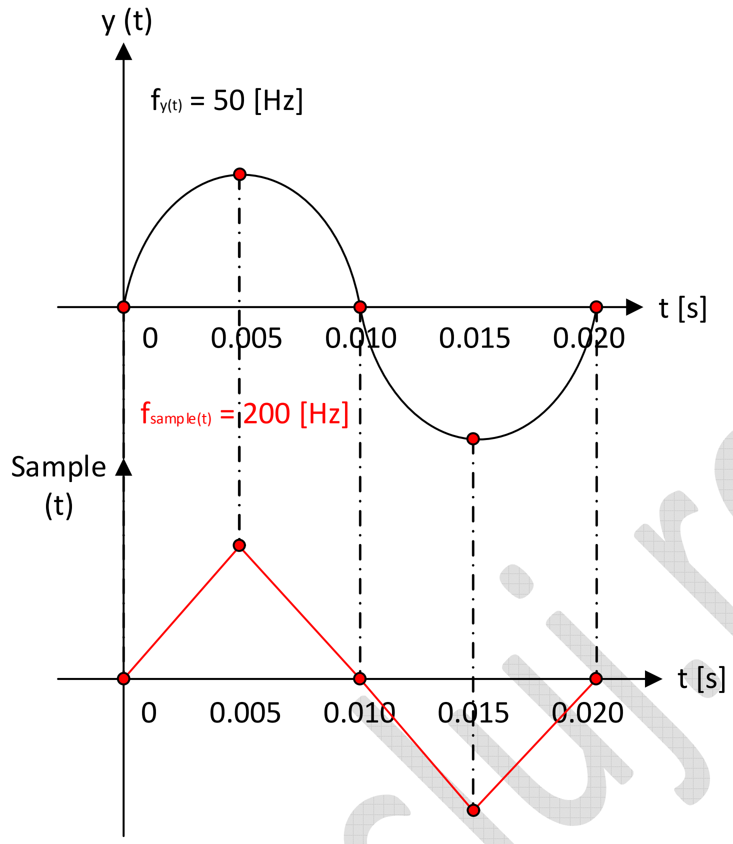


A. $f_{sample(t)} = f_{y(t)} = 1 \times 50$ [Hz]; $T_{sample(t)} = 0{,}02$ [s]; << $T_{Nyquist} = 0{,}01$ [s];

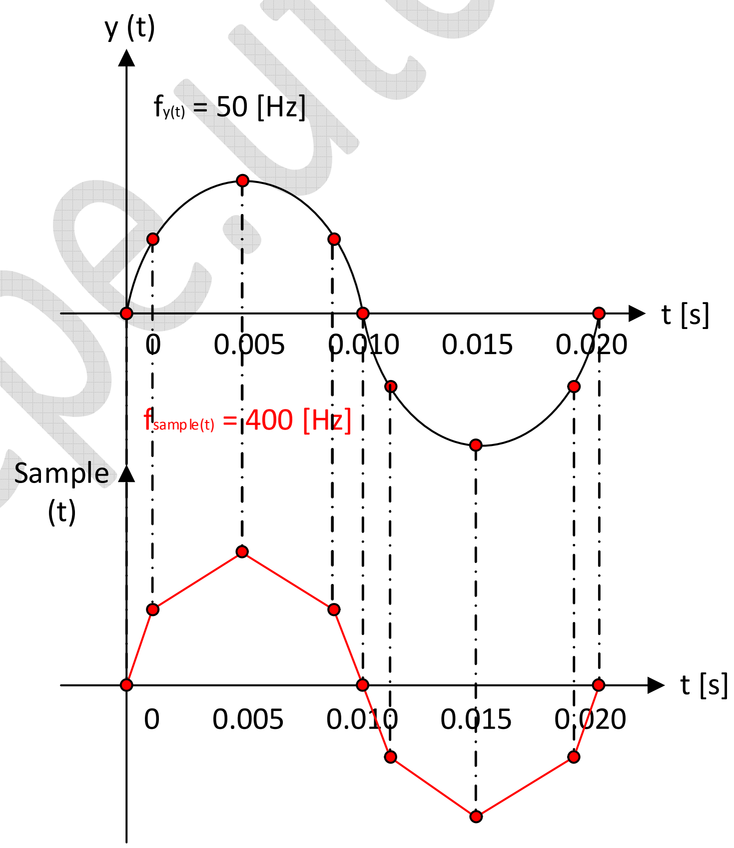


B. $f_{sample(t)} = 2 \times f_{y(t)} = 2 \times 50$ [Hz] = 100 [Hz]; $T_{sample(t)} = 0{,}01$ [s] = $T_{Nyquist} = 0{,}01$ [s];

Realizat de: Ing. mast. Pintilie Lucian Nicolae
Pentru disciplina: „Sisteme de calcul în timp real”
Adresă de e-mail: Lucian.Pintilie@emd.utcluj.ro

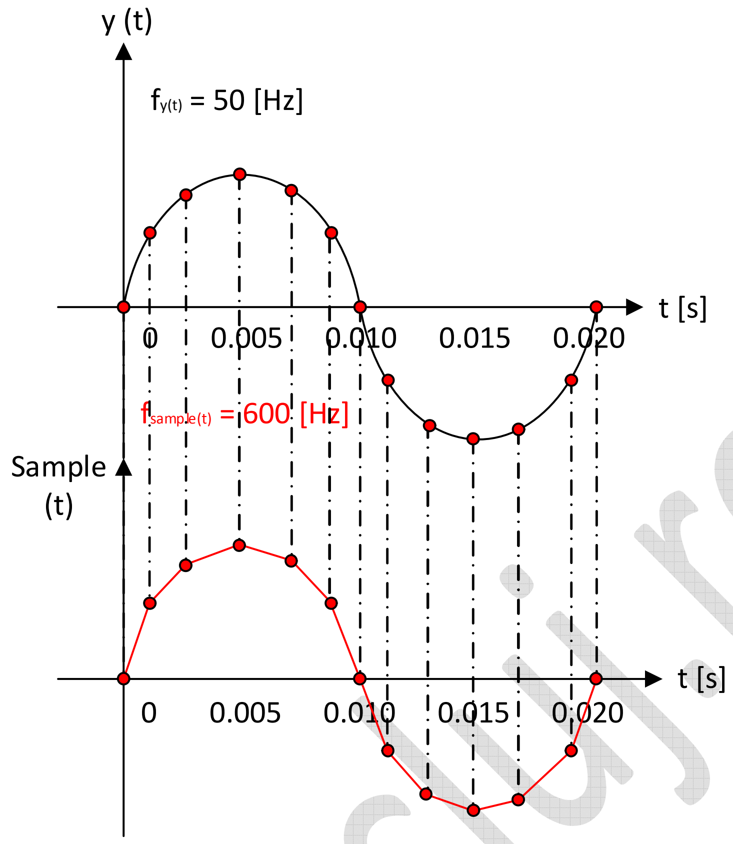


C. $f_{sample(t)}$ = 4 x $f_{y(t)}$ = 4 x 50 [Hz] = 200 [Hz]; $T_{sample(t)}$ = 0,005 [s] > $T_{Nyquist}$ = 0,01 [s];



D. $f_{sample(t)}$ = 8 x $f_{y(t)}$ = 8 x 50 [Hz] = 400 [Hz]; $T_{sample(t)}$ = 0,0025 [s] >> $T_{Nyquist}$ = 0,01 [s];

Realizat de: Ing. mast. Pintilie Lucian Nicolae
Pentru disciplina: „Sisteme de calcul în timp real”
Adresă de e-mail: Lucian.Pintilie@emd.utcluj.ro



E. $f_{sample(t)}$ = 12 x $f_{y(t)}$ = 12 x 50 [Hz] = 600 [Hz]; $T_{sample(t)}$ = 0,001(6) [s] >> $T_{Nyquist}$ = 0,01 [s];

fig. 1 - A, B, C, D, E – Comportamentul semnalului achiziționat la diferite frecvențe de eșantionare

În figura „fig. 1” avem reprezentate două forme de undă a două semnale, anume: **„y(t)”** și **„Sample(t)”**, unde, **„y(t)”** se consideră a fi un **semnal pur sinusoidal cu frecvență fundamentală de 50 [Hz]** și **amplitudine unitară**, semnalul **„Sample(t)”** reprezintă **rezultatul sistemului numeric de achiziție**, iar **punctele roșii** reprezintă **„nodurile”** sau **„punctele de măsură”**. Semnalul **„Sample(t)”** este **„construit”** prin **unirea punctelor de măsură** cu **segmente de dreaptă** (procedeu numit **„aproximarea unei curbe prin segmente de dreaptă”** practic, prin **aproximări succesive** sau **interpolare** se identifică **curba de variație** a semnalului în timp). **În realitate**, pentru un **semnal continuu pur analogic**, **între două puncte de eșantionare** există o **infinitate de valori.** Procesul de **eșantionare** presupune **„surprinderea”** selectivă a anumitor **puncte de măsură / valori ale semnalului**. Deci **suprinderea mai multor puncte**, conduce la **creșterea fidelității semnalului.**

Pentru situația de față avem:
A. $f_{sample(t)}$ = $f_{y(t)}$ = 1 x 50 [Hz]; $T_{sample(t)}$ = 0,02 [s]; << $T_{Nyquist}$ = 0,01 [s]; - SUBEȘANTIONARE, un punct surprins la finalul perioadei, forma de undă este ALIAS;
B. $f_{sample(t)}$ = 2 x $f_{y(t)}$ = 2 x 50 [Hz] = 100 [Hz]; $T_{sample(t)}$ = 0,01 [s] = $T_{Nyquist}$ = 0,01 [s]; - SUBEȘANTIONARE, două puncte (al treilea punct este tot zero!) – ALIAS;

Realizat de: Ing. mast. Pintilie Lucian Nicolae
Pentru disciplina: „Sisteme de calcul în timp real”
Adresă de e-mail: Lucian.Pintilie@emd.utcluj.ro

C. $f_{sample(t)} = 4 \times f_{y(t)} = 4 \times 50$ [Hz] = 200 [Hz]; $T_{sample(t)} = 0{,}005$ [s] > $T_{Nyquist} = 0{,}01$ [s]; - SUBEȘANTIONARE (avem patru puncte), formă de undă triunghiulară, ALIAS;
D. $f_{sample(t)} = 8 \times f_{y(t)} = 8 \times 50$ [Hz] = 400 [Hz]; $T_{sample(t)} = 0{,}0025$ [s] >> $T_{Nyquist} = 0{,}01$ [s]; - EȘANTIONARE NORMALĂ, formă de undă asemănătoare, dar tot este un ALIAS;
E. $f_{sample(t)} = 12 \times f_{y(t)} = 12 \times 50$ [Hz] = 600 [Hz]; $T_{sample(t)} = 0{,}001(6)$ [s] >> $T_{Nyquist} = 0{,}01$ [s]; - EȘANTIONARE NORMALĂ, forma de undă aproape identică, nu mai este un ALIAS.

OBSERVAȚIE: 1. Deși formele de undă ALIAS se consideră a fi generate incorect de către sistemul de achiziție, totuși, pe baza lor se pot identifica parametrii semnalului precum:
Cazul A: Detecția perioadei (ciclului) semnalului printr-un singur punct de măsură;
Cazul B: Detecția trecerilor prin zero ale semnalului prin trei puncte de măsură;
Cazul C: Detecția minimului și maximului dintr-un semnal prin două puncte extreme;
Cazul D: Detecția valorii efective a semnalului prin patru puncte mediane (2 – 4; 6 – 8);
Cazul E: Identificarea unei curbe de variație a funcției semnalului.

2. Pentru a realiza un anumit **set / număr de măsurători**, sistemul de calcul în timp real dotat cu sistem de achiziție, **alocă un anumit cuantum de resurse** procesului precum: **spațiu în memorie**, **putere și viteză de calcul**, **tact de ceas**, **cereri de întrerupere**. Din acest motiv, **nu ar fi justificată** o evaluare **mult prea fidelă** a semnalului **dacă aceasta nu este impusă sau cerută**! Un astfel de procedeu, în care, **sistemul de achiziție** preia **mult mai multe măsurători decât poate sistemul de calcul să proceseze** se numește **SUPRAEȘANTIONARE (eng. over-sampling).**

CONCLUZIE: PENTRU A ALEGE TIMPUL DE EȘANTIONARE / FRECVENȚA DE EȘANTIONARE, TREBUIE SĂ SE DETERMINE FRECVENȚA MAXIMĂ POSIBILĂ VEHICULATĂ ÎN SISTEM (SAU PERIOADA MINIMĂ), DUPĂ CARE SE VA TRECE LA DETERMINAREA FRECVENȚEI NYQUIST CA ȘI DUBLUL FUNDAMENTALEI MAXIME (SAU JUMĂTATEA PERIOADEI MINIME A SEMNALULUI CU FRECVENȚĂ FUNDAMENTALĂ MAXIME). DUPĂ AFLAREA FRECVENȚEI DE PRAG NYQUIST, SE VA PUTEA ALEGE O FREVENȚĂ DE EȘANTIONARE MULT MAI MARE, SAU O PERIOADĂ / UN TIMP DE EȘANTIONARE MULT MAI MIC DECÂT PERIOADA NYQUIST MINIM VEHICULATĂ.

În cazul **micro-controllerelor Arduino**, cea mai bună valoarea pentru timpul de eșantionare este de **10^{-3} [s] adică aprox. 1 [kHz]**. În contrast cu o **frecvență fundamentală uzuală** (alternativ sinusoidală) de **50 [Hz]**, **factorul de multiplicare** este de **20**. Practic, cu un astfel de sistem, s-ar putea achiziționa o tensiune **sinusoidală alternativă la 50 [Hz] în 20 de puncte de măsură** pe perioadă. Perioada unui semnal cu frecvență de 50 [Hz] este de 0.02 [s], frecvența Nyquist este de 100 [Hz], perioada Nyquist este de 0.01 [s]. În raport cu perioada Nyquist, timpul de eșantionare ales **10^{-3} [s]** este **mai mic de 10 ori** (decât perioada Nyquist); Pentru a respecta faptul că, semnalul trebuie să aibă o perioadă de eșantionare de 20 de ori mai mică decât perioada fundamentalei, se recomandă ca timpul de eșantionare să fie **10^{-4}**.Din cauza faptului că, platforma Arduino **comunică serial** la o **frecvență mult mai joasă decât frecvența de achiziție**, cea mai bună valoare rămâne **10^{-3} [s].**

Realizat de: Ing. mast. Pintilie Lucian Nicolae
Pentru disciplina: „Sisteme de calcul în timp real”
Adresă de e-mail: Lucian.Pintilie@emd.utcluj.ro